Vorlesungen über Geschichte der Mathematik

von Moritz Cantor

Erster Band. - 3. Aufl.

Leipzig, 1907. - S. 1 - 16

Einleitung

---

(3)

Längst war der Erdball so weit erkaltet, daß auf der festgewordenen Oberfläche Organismen sich entwickeln konnten. In Zeiträumen, deren jeder weitaus die Spanne übertrifft, welche wir mit dem stolzen Namen der Geschichte belegen — als ob nur durch den Menschen etwas geschehen könnte! — hatten neue und neue Arten lebender Wesen sich abgelöst. Jetzt erschien der Mensch, ausgezeichnet durch Entwicklungsfähigkeit vor allen anderen Geschöpfen, hilflos wie keines in das Leben tretend, mächtig wie keines auf dem Gipfel seiner Ausbildung.

Der einzelne Mensch liefert nur das verkleinerte Bild des Menschengeschlechtes. Die Entwicklung des Menschengeistes hat in den, Völker genannten, Gesamtheiten stattgefunden, und ihre aufeinanderfolgenden Stufen zu vergleichen ist von spannender Anziehung.

Eines dürfen wir freilich bei Anerkennung der Ähnlichkeit der Entwicklung des Einzelmenschen mit der des Menschengeschlechtes nicht außer Augen lassen. Das Kind lernt vom Tage seiner Geburt an durch Menschen. Das Menschengeschlecht begann damit, von niedrigeren Geschöpfen lernen zu müssen. Werden doch wohl Tiere sein Vorbild gewesen sein, aus deren Beispiel er entnahm, wie man den Durst, den Hunger stille, wie man in Höhlen Schutz suche vor der Unbill der Witterung, wie man zur Wehr sich setze gegen feindlichen Angriff. Aber der Mensch war schwächeren Körpers als seine Lehrmeister. Ihm war nicht eine dichtere Behaarung während der kälteren Jahreszeiten gegeben. Er konnte nicht mit Händen und Zähnen des Bären oder der Hyäne Herr werden, denen er, die ihm den Aufenthalt streitig machten. Und seine Schwäche wurde seine Stärke. Er mußte denken! Er mußte erfinden, wenn er leben wollte. Er mußte von der ihm äußerlich gebotenen Erfahrung weiter schreiten. Das Tier führte ihn zum Baume der Erkenntnis, die Frucht desselben pflückte er selbst.

Mit dem Gedanken war das Bedürfnis der Mitteilung desselben erwacht, die Sprache entstand. Der Mensch lernte den Menschen verstehen, nicht nur in dem Sinne wie das Tier das Tier versteht, nicht nur, wo es den Ausdruck besonders starker Empfindungen durch Tonbildung galt, sondern wo bestimmte Ereignisse oder gar Begriffe zur Kenntnis des anderen gebracht werden sollten. Freilich be- (4)
gann die Sprachbildung nicht erst, als die Begriffsbildung abgeschlossen war. Ist doch erstere wie letztere bis auf den heutigen Tag noch im Flusse. Die beiden Tätigkeiten gingen offenbar nebeneinander einher, und selbst Begriffe, welche einer und derselben Gedankenreihe entstammen, sind mit ihrer lautlichen Versinnlichung als zu verschiedenen Zeiten entstanden zu denken. Für das Sprachliche an dieser Behauptung ist es nicht schwer den Beweis zu führen, auch nur unter Zuziehung solcher Wörter, die dem Mathematiker von ältester und hervorragendster Wichtigkeit sind; wir meinen die ***Zahlwörter.***

Zählen, insofern damit nur das bewußte Zusammenfassen bestimmter Einzelwesen gemeint ist, bildet, wie scharfsinnig hervorgehoben worden ist[1], keine menschliche Eigentümlichkeit; auch die Ente zählt ihre Jungen. Diesem niedersten Standpunkte ziemlich nahe bleibt das, was von einem südafrikanischen Stamme berichtet wird[2], daß während wenige weiter zählen können als zehn, dessenungeachtet ihre Vorstellung von der Größe einer Herde Vieh so bestimmt ist, daß nicht ein Stück daran fehlen darf, ohne daß sie es sogleich merkten. „Wenn Herden von 400 bis 500 Rindern zu Hause getrieben werden, sieht der Besitzer sie hereinkommen und weiß bestimmt ob einige fehlen, wieviel und sogar welche. Wahrscheinlich haben sie eine Art zu zählen, bei welcher sie keine Worte brauchen und wovon sie nicht Rechenschaft zu geben wissen, oder ihr Gedächtnis erlangt für diesen einzelnen Gegenstand durch die Übung eine so ungemeine Stärke.“ Ohne nach so fernen Gegenden unseren Blick zu richten, können wir ähnliche Erfahrungen täglich an ganz kleinen Kindern machen, welche sofort wissen, wenn von Dominosteinen etwa, mit denen sie zu spielen gewohnt sind, ein einzelner fehlt, während sie sich und anderen über die Anzahl ihrer Steine noch nicht Rechenschaft zu geben wissen. Sie kennen eben die Einzel-Individuen als einzelne, nicht als Teile einer Gesamtheit, und ihr Gedächtnis ist für die Erinne- (5)
rung an Angeschautes um so treuer, je weniger andere Eindrücke es zu bewahren hat. In der Sprache drückt sich diese Individualisierung nicht selten dadurch aus,

[1] H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittel- alter. Leipzig 1874. S. 7. Wir zitieren dieses Buch künftig immer als Hankel. Einen ganz ähnlichen Gedanken hat (nach Kaestner, Geschichte der Mathematik I, 242) auch schon Pietro Bongo (oder Bungus) in seinem Werke *Numerorum mysteria* (1599, II. Auflage 1618) ausgesprochen.

[2] Pott, Die quinäre und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Welttheile, Halle 1847. S. 17. Dieses Buch zitieren wir in der ganzen Einleitung als Pott I, während Pott II die Schrift desselben Verfassers: Pott, Die Sprachverschiedenheit in Europa an den Zahlwörtern nachgewiesen, sowie die quinäre und vigesimale Zählmethode. Halle 1868, bedeuten soll.

daß dieselbe Anzahl je nach den gezählten Dingen einen anderen Namen führt, wie es bei manchen ozeanischen Völkerstämmen, aber auch für Sammelwörter im Deutschen vorkommt, wenn man von einem Koppel Hunde oder, wenn deren mehrere sind, von einer Meute Hunde, von einer Herde Schafe, von einem Rudel Hirsche, von einer Flucht Tauben, von einer Kette Feldhühner, von einem Zug Schnepfen, von einem Schwarm Bienen zu reden pflegt[3].

Das eigentliche Zählen, das menschliche Zählen, wenn man so sagen darf, setzt voraus, daß die Gegenstände als solche gleichgültig geworden sind, daß nur das getrennte Vorhandensein unterschiedener Dinge begrifflich erfaßt, dann sprachlich bezeichnet werden soll. Es liegt darin bereits eine keineswegs unbedeutende Äußerung der Fähigkeit zu verallgemeinern, zugleich auch eine ihrer frühesten Äußerungen, denn die Zahlwörter gehören zu den ältesten Teilen des menschlichen Sprachschatzes. In ihnen lassen sich oft noch Ähnlichkeiten, mithin Beweise alter Stammesgemeinschaft später getrennter Völker auffinden, während kaum andere Wörter auf die gleiche Zeit eines gemeinsamen Ursprunges zurückdeuten. Und was war nun der ursprüngliche Sinn dieser ältesten, der Entstehungszeit wie dem Inhalte nach ersten Zahlwörter? Die Annahme hat gewiß viel für sich, daß sie anfänglich nicht Zahlen, sondern ganz bestimmte Gegenstände bedeuteten, sei es nun, daß man von der eigenen, von der angeredeten, von der besprochenen Persönlichkeit, also von den Wörtern: ich, du, er ausging, um aus ihnen den Urklang für: eins, zwei, drei zu gewinnen[4], sei es, daß man von Gliedmaßen seines Körpers deren Anzahl entnahm[5]: „Es war dem Menschen ohne Zweifel ein eben so interessantes Bewußtsein fünf Finger als zwei Hände oder zwei Augen zu haben; und das Interesse an dieser Kenntnis, welche einmal einer Entdeckung bedurfte, war ihm die Schöpfung eines zu deren Zählung eigens verwendbaren Ausdruckes wohl wert; von hier aus mag der Gebrauch auf andere zu zählende Dinge übertragen worden, sein, zunächst auf solche, bei denen es auffallen mochte, daß sie in ebenso großer Zahl vorhanden waren, als die Hand Finger hat.“ Wir; wiederholen es, solche Annahmen haben viel für sich, sie tragen ihre beste Empfehlung in sich selbst, aber leider auch ihre einzige. Die Sprachforschung hat nicht vermocht deren Bestätigung zu liefern, oder vielmehr jeder, der mit der Deutung (6)
der Zahlwörter sich befaßte, hat aus ihnen diejenigen Zusammenhänge zu erkennen gewußt, welche seiner Annahme entsprachen, lauter vollgelungene Beweise, wenn man den einen hört, sich gegenseitig vernichtend, wenn man bei mehreren sich Rat holt, und dieser mehreren sind obendrein recht viele. Sind demnach die eigentlichen Fachmänner über Ursprung der ältesten einfachen Zahlwörter im Hader, so müssen wir um so mehr darauf verzichten, auf die noch keineswegs erledigten Fragen hier einzugehen. Einige Sicherheit tritt erst bei Besprechung der abgeleiteten, also jüngeren Zahlwörter hervor.

---

[3] Pott I, S. 126.

[4] Pott I, S. 119.

[5] L. Geiger, Ursprung und Entwickelung der menschlichen Sprache und Vernunft. 1868. Bd. I, S. 319.

Es ist leicht begreiflich, daß auch die regste Einbildungskraft, das stärkste Gedächtnis es nicht vermochten, für alle aufeinander folgenden Zahlen immer neue Wörter zu bilden, zu behalten. Man mußte mit Notwendigkeit sehr bald zu gewissen Zusammensetzungen schreiten, welchen die Entstehungsweise einer Zahl aus anderen zugrunde liegt, welche uns aber damit auch schon einen unumstößlichen Beweis für die hochwichtige Tatsache liefern: daß zur Zeit, als die meisten Zahlwörter erfunden wurden, der Mensch von dem einfachsten Zählen bereits zum ***Rechnen*** vorgeschritten war.

Das älteste Rechnen dürfte durch ein gewisses Anordnen vermittelt worden sein, sei es der Gegenstände selbst, denen zuliebe man die Rechnung anstellte, sei es anderer leichter zu handhabender Dinge. Kleine Steinchen, kleine Muscheln können die Vertretung übernommen haben, wie sie es noch heute bei manchen Völkerschaften tun, und diese Marken, diese Rechenpfennige würde man heute sagen, werden in kleinere oder größere Häufchen gebracht, in Reihen gelegt das Zusammenzählen ebenso wie das Teilen einer gegebenen Menge wesentlich erleichtert haben. So lange man es nur mit kleinen Zahlen zu tun hatte, trug man sogar das leichteste Versinnlichungsmittel stets bei sich: die Finger der Hände, die Zehen der Füße. Man reichte freilich unmittelbar damit nicht weit, und Völkerschaften des südlichen Afrika zeigen uns gegenwärtig noch, wie genossenschaftliches Zusammenwirken die Schwierigkeit besiegt, mit nur zehn Fingern größere Anzahlen sich zu versinnlichen[6]: „Beim Aufzählen, wenn es über Hundert geht, müssen in der Regel immer drei Mann zusammen diese schwere Arbeit verrichten. Einer zählt dann an den Fingern, welche er einen nach dem andern aufhebt und damit den zu zählenden Gegenstand andeutet oder womöglich berührt, die Einheiten. Der zweite hebt seine Finger auf ***(immer mit dem kleinen Finger der linken Hand beginnend und*** (7)
fortlaufend bis zum kleinen Finger der Rechten) für die Zehner, so wie sie voll werden. Der dritte figuriert für die Hunderte.“

Die hierbei festgehaltene Ordnung der Finger mag man nun erklären wollen, wie es auch sei[7], sie findet statt und wird uns im Verlaufe der Untersuchungen als Grundlage des sogen. ***Fingerrechnens*** noch mehr als einmal begegnen. Sie wird sogar abwechselnd mit der entgegengesetzten Ordnung benutzt, um einem einzelnen zu ermöglichen beliebig viele Gegenstände abzuzählen. Ist nämlich mit dem kleinen Finger der rechten Hand die Zehn erfüllt worden, so beginnt mit eben demselben allein aufgehoben die nächste Zehnzahl, um dieses Mal nach links sich fortzusetzen, d. h. der kleine Finger der linken Hand vollendet die Zwanzig und wird zugleich auch wieder Anfang der nächsten Zehnzahl usf. Natürlich muß bei dieser Zahlenangabe, wenn es nicht um ein allmähliches Entstehen, sondern um ein einmaliges Ausdrücken einer Zahl sich handelt, besonders angedeutet werden, daß und wie oft Zehn vollendet wurde, was etwa so geschehen kann wie

[6] Schrumpf in der Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft XVI, 463.

[7] Pott II, S. 46, aber auch S. 31 und 42.

bei den Zulukaffern[8], die in solchem Falle beide Hände mit ausgestreckten Fingern wiederholt zusammenschlagen.

Es ist wohl zu beachten, daß diese letztere Methode der Versinnlichung einer Zahl, einfacher insoweit als sie nur die Hände eines einzigen beschäftigt, begrifflich weit unter jener anderen Methode steht, die unmittelbar vorher gekennzeichnet wurde und drei oder gar noch mehrere Darsteller einer Zahl erfordert. Der einzelne kommt durch die Zehnzahl der menschlichen Finger allerdings dazu, die Gruppe Zehn als eine besonders hervortretende zu erkennen, aber wie oft diese Gruppe selbst auch erzeugt werde, jede Neuerzeugung ist für ihn der anderen ebenbürtig. Ganz anders bei der Methode stufenmäßiger Darstellung durch mehrere Personen. Wie der Erste so hat der Zweite, der Dritte nur je zehn Finger, und so erscheint die Gruppierung von zehn Einern zwar zunächst, aber in gleicher Weise auch die von zehn Zehnern, von zehn Hundertern. Das scheinbar umständlichere Verfahren führt zu dem einfacheren Gedanken, zum ***Zahlensystem***. Wenn von einem Schriftsteller[9] darauf hingewiesen worden ist, daß die Wiederholung der Zehnzahl bis zu 10 mal 10 sich bei Erfüllung der nächsten 10 ebensowohl zu 11 mal 10 als zu 10 mal 10 und 10, in Worten ebensowohl zu elfzig als zu hundertzehn fortsetzen konnte, und daß es ein besonders glücklicher Griff war, der fast allen Völkern der Erde gelang, soweit ihre Fassungskraft überhaupt bis (8)
zum Bewußtwerden bestimmter, höherer Zahlen ausreicht, gerade die Wahl zu treffen, welche dem Zahlensystem seine Grundlage gab; so ist diese feine Bemerkung vielleicht dahin zu ergänzen, daß auf eine der hier erörterten nahestehende Weise jene glückliche Wahl eingeleitet worden sein mag.

Über die Grundzahlen solcher Zahlensysteme werden wir sogleich noch reden. Fürs erste halten wir daran fest, daß Zahlensysteme eine allgemein menschliche Erfindung darstellen, in allen bekannt gewordenen Sprachen zu einer Grundlage der Bildung von bald mehr bald weniger Zahlwörtern benutzt, indem höhere Zahlen durch Vervielfältigung von niedrigeren zusammengesetzt werden und bei Benennung der Zwischenzahlen auch Hinzufügungen noch notwendig erscheinen. ***Multiplikation und Addition sind also zwei Rechnungsverfahren so alt wie die Bildung der Zahlwörter.***

Das Zahlensystem, welches wir in seinem Entstehen uns zu vergegenwärtigen suchten, wurde, sofern es auf der Grundzahl ***Zehn*** fußte, zum ***Dezimalsystem***, heute wie unserem Zifferrechnen so auch in unseren Maßen, Gewichten, Münzen fast der ganzen gebildeten Erdbevölkerung unentbehrlich. Wir haben als wahrscheinlich erkannt, daß es nach der Zahl der Finger sich bildete, aber eben vermöge dieses Ursprunges war es nicht das allein mögliche. Wie man sämtliche Finger durchzählen konnte, um eine Einheit höheren Ranges zu gewinnen, so konnte man Halt machen nach den Fingern nur einer Hand, man konnte neben den Fingern der Hände die Zehen der Füße benutzen. In dem einen Falle blieb man beim

[8] Pott II, S. 47.

[9] Hankel, S. 10-11.

Quinarsysteme, in dem anderen ging man zum **Vigesimalsystem** über.

Ein strenges Quinarsystem würde, wie leicht ersichtlich, 5 mal 5 oder 25, 5 mal 5 mal 5 oder 125 usw. als Einheiten höheren Ranges nächst der 5 selbst besitzen müssen, welche durch einfache oder auch zusammengesetzte Namen bezeichnet mit den Namen der Zahlen 1, 2, 3, 4 sich vereinigen, um so alle zwischenliegende Zahlen zu benennen. Ein solches strenges Quinarsystem gibt es nicht[10]. Dagegen gibt es Quinarsysteme in beschränkterem Sinne des Wortes, wenn zur Benutzung dieses Wortes schon der Umstand als genügend erachtet wird, daß die Fünf bei allmählicher Zahlenbildung einen Ruhepunkt gewähre, von dem aus eine weitere Zählung wieder anhebt.

Was dementsprechend von einem strengen Vigesimalsysteme zu verlangen ist, leuchtet gleichfalls ein: ein solches muß die Grundzahl 20 durchhören lassen, muß
die Einheit höheren Ranges 20 mal 20 oder 400, vielleicht auch noch höhere Ein- (9)
heiten unter besonderen Namen besitzen. Sprachen, in welchen dieses System maßgebend ist, hat man mehrfach gefunden. Die Mayas in Yukatan[11] haben eigene Wörter für 20, 400, 8000, 160000. Die Azteken in Mexiko[12] hatten wenigstens besondere Wörter für 20, 400, 8000 mit der Urbedeutung: das Gezählte, das Haar, der Beutel, wobei auffallend erscheinen mag, daß das Haar eine verhältnismäßig niedrige Zahlenbedeutung hat, während es in karaibischen Sprachen[13] weit übereinstimmender mit der Wirklichkeit eine sehr große Zahl auszudrücken bestimmt ist. Noch andere Beispiele eines bemerkbaren mehr oder minder durchgeführten Vigesimalsystems hat vornehmlich Pott, dem wir hier fast durchweg folgen, in Fülle gesammelt. Wir erwähnen davon nur als den meisten unserer Leser zweifellos bekannt die Überreste eines keltischen Vigesimalsystems in der französischen Sprache in Wörtern wie *quatrevingts, sixvingts, quinzevingts*[14]. Von dänischen Überresten eines Systems, in welchem Vielfache von 20 eine Rolle spielen, ist weiter unten in etwas anderem Zusammenhange die Rede.

Den Ursprung der drei Systeme, deren Grundzahlen 5, 10, 20 heißen, haben wir oben in die Finger und Zehen des Menschen verlegt. Auch dafür sind sprachliche Anklänge vorhanden. Zwischen den Wörtern für 5 und für Hand ist in manchen Sprachen völlige Gleichheit, in anderen nahe Verwandtschaft[15]. Alsdann darf man aber wohl annehmen, daß es früher wünschenswert war die Glieder des eigenen Körpers zu benennen, als Zahlwörter zu bilden, daß also 5 von Hand abgeleitet wurde, nicht umgekehrt. Das Wort für 10 heißt in der Korasprache[16]

[10] Pott II, S. 35 und 46 in den Anmerkungen.

[11] Pott I, S. 93.

[12] Pott I, S. 97-98.

[13] Pott II, S. 68.

[14] Pott I, S. 88.

[15] Pott I, S. 27 flgg. und S. 128 flgg. führt Beispiele aus ozeanischen Sprachen, aus dem Sanskrit und dem Hebräischen an, wenn er auch den letzteren gegenüber die von Benary und Ewald herrühren, sich ziemlich skeptisch verhält.

[16] Pott I, S. 90.

(einem amerikanischen Idiome) so viel wie Darreichung der Hände, und daß ein und dasselbe Wort 20 und Mensch bedeutet kommt mehrfach vor[17]. Ob freilich, wie manche wollen, auch das deutsche zehn mit den Zehen, das lateinische *decem* mit *digiti* in Verbindung gebracht werden darf, darüber gehen die Meinungen weit auseinander, und Pott, unser Gewährsmann, steht auf der Seite der Verneinenden. Jedenfalls ist aber schon durch die erwähnten Beispiele ein innerer Zusammenhang der drei genannten Systeme untereinander und mit den menschlichen Extremitäten hinlänglich unterstützt. Gibt es nun Sprachen, in welchen auch andere Grundzahlen als 5, 10 oder 20 sich nachweisen lassen? (10)

Wenn man gesagt hat[18], daß kein Volk auf der ganzen Erde je von einer anderen Grundzahl, als einer der genannten aus, sein Zahlensystem mit einiger Konsequenz ausgebildet habe, so ist dieser Ausspruch entschieden allzu verneinend, selbst wenn man einen besonderen Nachdruck auf das Wort Konsequenz legt, dem gegenüber die Frage erhoben werden möchte, wo denn folgerichtige Anwendung des Quinarsystems sich finde?

Allerdings hat man einige Gattungen von Zahlensystemen nur mit Unrecht nachweisen zu können geglaubt. Falsch war es, wenn Leibniz bei den Chinesen ein Binarsystem annahm[19]. Falsch scheint Kohl den Osseten im Kaukasus ein Oktodezimalsystem zugeschrieben zu haben[20]. Dagegen sind andere Angaben doch zu wohl beglaubigt, um sie ohne weiteres leugnen oder totschweigen zu dürfen. Die Neuseeländer mit ihrem merkwürdigen Undezimalsysteme[21], welches besondere Wörter für 11, für 11 mal 11 oder 121, für 11 mal 11 mal 11 oder 1331 besitzt, welches 12 durch 11 mit l, 13 durch 11 mit 2, 22 durch 2 mal 11, 33 durch 3 mal 11 usw. ausdrückt, lassen sich nicht vornehm beiseite schieben. Ob der Zeitraum von 110 Jahren, nach welchen, wie Horaz im 21. und 22. Verse seines *Carmen saeculare* berichtet, die römische Erinnerungsfeier wiederkehrte, der man den Namen der saecularen beilegte, mit einer Vermengung dezimaler und undezimaler Zählweise zusammenhängt, bleibe dahingestellt. Das Wort *triouech* oder 3 mal 6 für 18 in der Sprache der Niederbretagner ist neben dem *deunaw* oder 2 mal 9 der Welschen[22] für eben dieselbe Zahl nun einmal vorhanden. Die Bolaner oder Buramaner an der Westküste Afrikas[23] lassen, wenn sie 6 und 1 für 7, wenn sie 2 mal 6 für 12, wenn sie 4 mal 6 für 24 sagen, die Grundzahl 6 gleichfalls durchhören. Einige assyrische Zahlwörter (7 und 8), auf welche wir im 1. Kapitel zurückkommen werden, zeigen dieselbe Abhängigkeit von 6. Und wenn der Altfriese 120

[17] Pott I, S. 92.
[18] Hankel, S. 19.
[19] M. Cantor, Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker. Halle 1863. S. 48 flgg., auch S. 44. Wir zitieren dieses Buch künftig immer als: Math. Beitr. Kulturl.
[20] Kohl, Reisen in Südrußland. Bd. II, S. 216 und Pott I, S. 81.
[21] Pott I, S. 75 flgg.
[22] Pott II, S. 33.
[23] Pott II, S. 30.

mit dem Worte *tolftich* benannte[24], so ist das sogar ein Hinweis darauf, daß auch das vorhin als menschlichem Geiste im allgemeinen fremdverpönte elfzig seine Analogien besitzt, ist es zugleich ein Beispiel für ein eigentümlich gemischtes System mit Dezimal- und Duodezimalstufen wie Skandinaven und Angelsachsen es teilweise besaßen[25], wie eine verhältnismäßig spätere Wissenschaft es in Babylon einbürgerte, von wo es als Sexagesimalsystem das astronomische Rechnen aller Völker durch Jahrhunderte beherrscht. Die Vermengung dezimalen und duode- (11)
zimalen Zählens könnte auch als Stütze der Möglichkeit dienen, welche oben für dezimale und undezimale Zahlen beansprucht wurde.

Das Vorhandensein von Zahlensystemen; deren Grundzahl nicht 5 oder Vielfaches von 5 ist, dürfte damit nachgewiesen sein. Aber allerdings bilden dieselben nur Ausnahmen von seltenem vereinzeltem Vorkommen. Auch eine andere Gattung von Ausnahmen gegen früher Erwähntes müssen wir kurz berühren. Wir haben hervorgehoben, daß die Zwischenzahlen zwischen den Einheiten aufeinanderfolgenden Ranges multiplikativ und additiv gebildet werden; wir haben daraus auf das hohe Alter dieser Rechnungsverfahren geschlossen. Es gibt nun Sprachen, welche die Bildung der Zahlwörter auf ***Subtraktionen*** und ***Divisionen*** stützen, wodurch das hohe Alter auch dieser Rechnungsverfahren wenigstens bei den Völkern, denen jene Sprachen angehören, gleichfalls zur Möglichkeit gelangt.

Die Subtraktion wird am häufigsten bezüglich der Zahlwörter eins und zwei geübt[26]. Dieses entspricht z. B. in der lateinischen Sprache durchweg dem Gebrauch bei den Zehnern. Man sagt *duodeviginti*, d. h. 2 von 20 für 18, ebenso *undecentum* 1 von 100 für 99 usw. Auch im Griechischen werden 1 und 2 bei den Zehnern zuweilen abgezogen, wozu das Zeitwort $\delta\epsilon\iota\nu$ in seiner transitiven wie in seiner intransitiven Bedeutung als ***bedürfen*** und als ***fehlen*** angewandt wird. So drückt man 58 aus durch $\delta\upsilon o\iota\nu\ \delta\epsilon o\nu\tau\epsilon\varsigma\ \epsilon\xi\eta\kappa o\nu\tau\alpha = 60$ welche 2 bedürfen, 49 durch $\epsilon\nu o\varsigma\ \delta\epsilon o\nu\tau o\varsigma\ \pi\epsilon\nu\tau\eta\kappa o\nu\tau\alpha = 50$ woran 1 fehlt, und ein vereinzeltes Vorkommen von $9700 = 10000$, welche 300 bedürfen $\tau\rho\iota\alpha\kappa o\sigma\iota\omega\nu\ \alpha\pi o\delta\epsilon o\nu\tau\alpha\ \mu\upsilon\rho\iota\alpha$ wird aus den Schriften des Thukydides angeführt[27]. Auch im Gotischen findet subtraktive Bildung von Zahlwörtern statt. In der gemeinsamen Stammsprache, im Sanskrit, ist gleichfalls eine Subtraktion mittels des Wortes *una* (vermindert, weniger) im Gebrauch. Sei es nun, daß das *una* selbst allein einem Zahlwort vorgesetzt wird, und man im Gedanken *eka* eins hinzuhören muß, z. B. *unavingsati*, vermindertes 20 statt 19, oder daß das *eka* wirklich ausgesprochen wird und sich dabei mit *una* zu *ekona* zusammensetzt, z. B. *ekonaschaschta*, um 1 vermindertes 60 statt 59, oder daß andere Zahlen als 1 abgezogen werden, z. B. *pantschonangsatam*, um 5 vermindertes 100 statt 95. Ob die babylonische Benutzung von *lal* = weniger hierher gehört[28] oder als eigentliche Subtraktion aufzufassen ist, sei

[24] Pott II, S. 38.
[25] Math. Beitr. Kulturl. S. 147.
[26] Math. Beitr. Kulturl. S. 157.
[27] Pott I, S. 181, Anmerkung.
[28] Reisner in Berl. Akad. Ber. 1896, S. 425–426 mit Berufung auf Tontafeln von Ur.

dahingestellt. (12)

Am seltensten dient die Division zur sprachlichen Bildung der Zahlwörter. Hier kommen neben den sofort verständlichen Teilungen: ein viertel Hundert, ein halbes Tausend usw., namentlich solche Wörter in Betracht, welche eine nicht voll vorhandene Einheit zur Teilung bringen. Anderthalb, dritthalb, sechsthalb besagen, daß das Andere, d. h. Zweite, daß das Dritte, daß das Sechste halb zu nehmen sei, die Existenz des Ersten, der 2, der 5 Vorhergehenden als selbstverstanden vorausgesetzt. Verwandte Bildungen sind in lateinischer und in griechischer Sprache *sesquialter* $= \epsilon\pi\iota\delta\epsilon\upsilon\tau\epsilon\rho o\varsigma = 1^1/_2$, *sesquitertius* $= \epsilon\pi\iota\tau\rho\iota\tau o\varsigma = 1^1/_3$, *sesquioctavus* $= \epsilon\pi o\gamma\delta o o\varsigma = 1^1/_8$ usw. Besonderer Hervorhebung scheint es wert, daß die dänische Sprache in Europa und im fernen Süden und Osten die Sprache der Dajacken und Malaien auf den nächsten Zwanziger beziehungsweise Zehner übergreift, um ihn hälftig vorweg zu nehmen[29]. Ein altes Vigesimalsystem in deutlichen Spuren verratend (S. 9) sagt die dänische Sprache nicht bloß *tresindstyve* oder 3 mal 20 für 60, *firesindstyve* oder 4 mal 20 für 80, sondern auch *halvtredsindstyve, halvfirdsindstyve* für 50 und 70, d. h. der dritte, der vierte Zwanziger, welcher bei 60, bei 80 voll vorhanden ist, kommt hier nur zur Hälfte in Rechnung. Ja man hat sogar *halvfemsindstyve* oder fünfthalb Zwanziger für 90, während 100 nur durch *hundrede* und nie durch *femsindstyve* ausgedrückt wird. Bei den Malaien heißt halb dreißig, halb sechzig es solle von dem letzten, also hier von dem dritten, sechsten Zehner nur die Hälfte genommen werden, man meine also 25, 55. Im Alttürkischen wird das Vorgreifen auf den nächsten Zehner noch weiter ausgedehnt[30]. „Vier dreißig“ bedeutet „vier von dem dritten Zehner“ also 24. Endlich im Äthiopischen findet sich ein merkwürdiger Ausnahmefall[31]. Die Äthiopen besitzen besondere Zeichen für die Einer, die Zehner, die Hunderter, mittels deren sie die Zwischenzahlen zusammensetzen. Sie schreiben also z. B. 59 durch die Zeichen „fünfzig neun“. Einzig und allein 99 wird anders geschrieben, nämlich nicht „neunzig neun“, sondern „neunzig hundert“, d. h. also etwa „ein Neunziger nahe bei Hundert“. Der Grund dieser Ausnahme ist unermittelt.

Alle diese Teilungen in sich schließende Ausdrücke sind gewiß merkwürdig, eine genaue Einsicht in das Alter der Division verglichen mit dem Alter der Sprachbildung geben sie uns deshalb doch nicht. Es sind eben Wörter mit Zahlenbedeutung, aber es sind nicht die Zahlwörter! Neben ihnen und statt ihrer sind auch andere möglicherweise viel ältere Ausdrücke in Gebrauch und lassen die Ent- (13)
stehungszeit der jüngeren Benennung im dichtesten Dunkel. Nicht anders verhält es sich mit den vorerwähnten subtraktiven Bildungen, zu welchen als weiteres Beispiel bestimmter Grenzpunkte, auf welche Vorhergehendes ebenso wie Folgendes bezogen wird, die Kalenderbezeichnung der Römer mit ihren Calenden, Nonen und Iden treten mag. Entscheidend dagegen sind die subtraktiven Zahlwörter ei-

[29] Pott I, S. 103 und II, S. 88.

[30] J. Marquart, Die Chronologie der alttürkischen Inschriften. Leipzig 1898.

[31] C. Bezold, Kebra Nagast. München 1905. S. XV, Note 3.

niger Sprachen, z. B. der Krähenindianer in Nordamerika[32]. Bei ihnen heißen 8 und 9 nie anders als *nópape, amátape*, d. h. wörtlich 2 davon, 1 davon, und das Wort Zehn, d. h. die Anzahl, von welcher 2, beziehungsweise 1 weggenommen werden sollen, ist als selbstverständlich weggelassen. Hier kann ein Zweifel kaum walten: die Namen der 8 und 9 sind erst entstanden, nachdem der Begriff der 10 sich gebildet hatte, nachdem das Rechnungsverfahren der Subtraktion erfunden war. Mit dieser Bemerkung kehren wir zu unserer früheren Behauptung zurück (S. 4), zu deren Begründung wir die ganze Erörterung über Zahlwörter und über die ersten Anfänge des Rechnens gleich hier anknüpfen durften. Die Sprache hielt in ihrer Entstehung nicht immer gleichen Schritt mit der Entstehung der Begriffe. Das aufeinanderfolgende Zählen wurde unterbrochen durch das Bewußtsein notwendiger Zahlen Verknüpfungen, Sprünge in der Erfindung der Zahlwörter sind nahezu sicher.

Und wieder machte der menschliche Erfindungsgeist einen Schritt vorwärts, einen Schritt, zu welchem er auch nicht die geringste Anregung von außen erhielt, der ganz aus eigenem Antriebe erfolgend mindestens ebenso sehr wie die künstliche Entfachung des Feuers als wesentlich menschlich, als keinem anderen Geschöpfe möglich anerkannt werden muß: er erfand die ***Schrift***. Bilderschrift, so nimmt man gegenwärtig wohl ziemlich allgemein an, war die erste, welche dem Spiegel der Rede (wie bei einem Negervolke das Geschriebene heißt)[33] den Ursprung gab. Aber mit Bildern allein kam man nicht aus. Neben wirklichen Gegenständen mußten Tätigkeiten, Eigenschaften, Empfindungen dem künftigen Wissen aufbewahrt werden. Die Notwendigkeit symbolischer oder willkürlich eingeführter Zeichen für diese nicht gegenständlichen Begriffe zwang zur Abhilfe. So müssen Begriffszeichen entstanden sein, gemeinsam mit den früheren Bildern eine Wortschrift herstellend. Jetzt erst — aber wer weiß in wie langer Zeit? — konnte man dahin gelangen in dem Gesprochenen nicht nur den ganzen Klang, sondern die einzelnen Laute, aus welchen er sich zusammensetzt, zu verstehen, und diese (14)

Einzellaute dem Auge zu versinnlichen. Die Silben- und Buchstabenschrift entstand. Für die Zahlen behielt man allgemein das Verfahren bei, welches in anderer Beziehung sich überlebt hatte. Inmitten der Silben-, der Buchstabenschrift treten ***Zahlzeichen***, d. h. Wortzeichen auf; und wer ein Freund philosophischen Grübelns ist, mag darüber sinnen, warum gerade hier eine Ausnahme sich aufdrängte. Warum hat gerade das mathematische Denken von jeher durch Wortzeichen, sei es durch Zahlzeichen, sei es durch andere sogenannte mathematische Zeichen, Unterstützung, Erleichterung und Förderung gefunden? Wir stellen die Frage, wir wagen nicht sie zu beantworten. Aber die Tatsache, an welche wir die Frage knüpften, steht fest, ebenso wie es feststeht, daß ein Zahlenschreiben in älteste Kulturzeiten hinaufreicht, wo dessen Zeichen inmitten geschichtlicher Inschriften vorkommen.

---

[32] Pott II, S. 65.

[33] Pott I, S. 18.

Die Verschiedenheit der Zahlzeichen ist eine gewaltige. Wir werden in mannigfachen Kapiteln dieses Bandes von solchen zu reden haben und wünschen nicht vorzugreifen. Aber ein Prinzip der Zahlenschreibung hat sich fast überall Bahn gebrochen, dessen Entdeckung dem Scharfsinne Hankels[34] um so größere Ehre macht, als es trotz seiner großen Einfachheit stets übersehen worden war. Es ist das ***Gesetz der Größenfolge***, wie wir, um eine kürzere Redeweise zu besitzen, es künftig nennen wollen, und besteht darin, daß ***bei allen additiv vereinigten Zahlen das Mehr stets dem Weniger vorausgeht***[35]. Natürlich ist die Richtung der Schrift bei Prüfung dieses Gesetzes wohl zu beachten, und wenn bei der von links nach rechts gehenden Schrift des Abendlandes der Hauptteil der Zahl links auftreten muß, so ist die Stellung bei Zahlendarstellungen semitischen Ursprunges entgegengesetzt, und wieder eine andere, wenn, wie bei den Chinesen, die Schrift in von oben nach unten gerichteten Reihen verläuft.

Die mathematischen Begriffe, bei denen wir in unserer flüchtigen Betrachtung der Anfänge menschlicher Kulturentwicklung, Anfänge, welche selbst Jahrtausende in Anspruch genommen haben mögen, zu verweilen Gelegenheit nahmen, gehören sämtlich dem einen Zweige der Größenlehre an, welcher über das Wieviel? der nebeneinander auftretenden Dinge das Was? derselben vernachlässigt. Es ist aber wohl keinem Zweifel unterworfen, daß neben Kenntnis und einfachster Verbindung der Zahlen einfache astronomische wie geometrische Begriffe wach geworden sein müssen. (15)

Wir werden der Geschichte der Astronomie grundsätzlich fern, bleiben, um nicht den schon so für uns fast unbezwingbar sich gestaltenden Gegenstand unserer Darstellung ohne Not zu vergrößern, aber zwei Bemerkungen können wir hier nicht unterdrücken. Aufgang und Untergang der Sonne waren gewiß schon in den Zeiten nomadischen Wanderns die beiden Marksteine, die Zeit und Raum in Grenzen schlossen. Morgen und Abend, Ost und West waren Begriffepaare, deren Entstehung wohl nicht früh genug angenommen werden können. Und als beim Ansässigwerden der Völker die Sonne zwar immer noch ihre Uhr, aber nicht ihren täglichen Wegweiser bildete, nach deren Stande sie sich zu richten pflegten, war das Orientierungsgefühl doch noch geblieben, hatte womöglich an Genauigkeit noch zugenommen. Am Südende des Pfäffiker-Sees in der Schweiz, sind Pfahlbauten beobachtet worden, welche genau nach den Himmelsgegenden gerichtet sind[36], und jene Bauten reichen jenseits der sogenannten Bronzezeit in eine Periode hinauf, welche nach geologischer Schätzung etwa 4000 Jahre vor Christi Geburt lag. Wir stellen in keiner Weise in Abrede, daß man bei der Orientierung der Wohnhäuser an praktische Rücksichten, an Besonnung, Wind und Wetter dachte„ aber man ***dachte*** doch, man übte nicht Zufälliges und Unbeabsichtig-

[34] Hankel, S. 32.

[35] Über Abweichungen von diesem Gesetze vergl. Kapitel 4.

[36] Diese Beobachtung rührt von Professor Quincke her, der uns freundlichst gestattete, von dieser seiner mündlichen Mitteilung Gebrauch zu machen.

tes. Von ähnlichen Orientierungen werden wir verschiedentlich zu reden haben. Die Richtung nach den Himmelsgegenden selbst wird uns niemals als Beweis der Übertragung von Begriffen von einem Volke zum andern gelten dürfen. Nur die Ermittlungsweise dieser Richtung wird zum genannten Zweck tauglich erscheinen.

Auch geometrische Begriffe, sagten wir, müssen frühzeitig entstanden sein. Körper und Figuren mit geradliniger, mit krummliniger Begrenzung müssen dem Auge des Menschen aufgefallen sein, sobald er anfing nicht bloß zu sehen, sondern um sich zu schauen. Die Zahl der Ecken, in welchen jene Flächen, jene Linien aneinanderstoßen, wird ihm der Bemerkung wert gewesen sein, wird ihn herausgefordert haben jenen Gebilden Namen zu geben. Vielleicht ist auch in ältesten Zeiten und in gegenseitiger Unabhängigkeit an vielen Orten zugleich beachtet worden, daß der Arm beim Biegen am Ellenbogen, das Bein beim Biegen am Knie, daß die beiden Beine beim Ausschreiten einen Winkel bilden, und der Name jeder von zwei einen Winkel bildenden Linien als *σκελος* bei den Griechen, *crus* bei den Römern, Schenkel bei den Deutschen, *leg* bei den Engländern, *jambe* bei den
Franzosen, *bâhu*, d. h. Arm bei den Indern, *kou*, d. h. Hüfte bei den Chinesen, (16)
der Zusammenhang *γωνος* Winkel mit *γονυ* Knie, dieses und ähnliches braucht nicht in allen Fällen Übertragung zu sein. Die genannten modernen Namen werden allerdings kaum anders als durch Übersetzung aus dem Lateinischen, wenn nicht aus dem Griechischen entstanden sein, aber die antiken Wörter können sehr wohl uraltes Ergebnis mehrfacher Selbstbeobachtung sein, uraltes Wissen.

Ist nun uraltes Wissen auch uralte Wissenschaft? Muß eine Geschichte der Mathematik so weit zurückgreifen, als sie noch hoffen darf mathematischen Begriffen zu begegnen?

Wir haben unsere Auffassung, unsere Beantwortung dieser Fragen darzulegen geglaubt, indem wir diese Einleitung vorausschickten. Kein Erzähler hat das Recht das Brechen, das Zusammentragen der ersten Bausteine, aus welchen Jahrhunderte dann ein stolzes Gebäude aufgerichtet haben, ganz unbeachtet zu lassen; aber die Bausteine sind noch nicht das Gebäude. Die Wissenschaft beginnt erzählbar erst dann zu werden, wenn sie Wissenschaftslehre geworden ist. Erst von diesem Zeitpunkte an kann man hoffen wirkliche Überreste von Regeln und Vorschriften zu finden, welche es erlauben mit einiger Sicherheit und nicht in allem und jedem dem eigenen Gedankenfluge vertrauend Bericht zu erstatten. Mögen Schriftsteller früherer Jahrhunderte ihre eigentlichen historisch-mathematischen Untersuchungen mit der Schöpfung begonnen haben den Worten der Schrift folgend: Aber du hast alles geordnet mit Maß, Zahl und Gewicht[37]. Uns beginnt eine wirkliche ***Geschichte der Mathematik*** mit dem ersten Schriftdenkmal, welches auf Rechnung und Figurenvergleichung Bezug hat.

[37] Weisheit Salomos XI, 22.