Mathematik als Geisteswissenschaft und Denkmittel der exakten Naturwissenschaften

von

Helmut Hasse

Mit Genehmigung der Tochter des Autors, Frau Jutta Kneser,
neu herausgegeben von Gabriele Dörflinger,
Universitätsbibliothek Heidelberg
2008

//www.ub.uni-heidelberg.de/helios/fachinfo/www/math/edd/Hasse/StudGen5.pdf

I. Historische Entwicklung.[1]

1. Mathematik als Kunst des Berechnens und Vermessens.

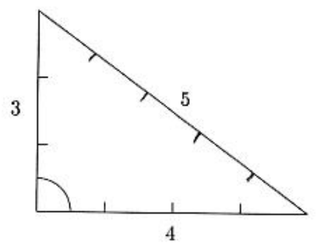
Die Wurzeln zu dem Komplex unserer heutigen Kultur, den wir Mathematik nennen, reichen bis in die frühesten Zeiten zurück, aus denen uns historische Kulturzeugnisse vorliegen. Sie beginnen mit der Konzeption von abstrakten Grundbegriffen wie „Zahl“, „Gerade“ aus den konkreten Gegenständen der Erfahrung, und mit der Verwendung dieser Begriffe zur Behandlung von Aufgaben aus dem praktischen Leben.

Bei den *Babyloniern* finden wir eine weitgehend ausgebildete *Kunst des Zahlenrechnens*, die nicht nur im kaufmännischen Leben, sondern z. B. auch auf die Berechnung des Laufes der Gestirne angewandt wurde.

Bei den *Ägyptern* war die *Kunst der räumlichen Vermessung* hoch entwickelt und diente zur Aufteilung der Felder und Errichtung von Bauwerken.

In beiden Fällen waren die benutzten Regeln für das Zahlenrechnen und das Vermessen geometrischer Gebilde *aus der Erfahrung gewonnen.* Es waren *praktische Rezepte,* für die man sich mit der durchgängigen Bestätigung in der Erfahrung begnügte, ohne tiefer darüber nachzudenken.

Als Beispiel sei etwa die *Rechtwinkelregel der Ägypter* angeführt:



$$12 = 3 + 4 + 5$$

Eine Schnur von 12 Längeneinheiten, so über drei Pflöcke gespannt, daß die Abschnitte 3, 4, 5 Längeneinheiten sind, gibt zwischen den beiden kleineren Abschnitten einen rechten Winkel.

Wir erkennen darin heute einen speziellen Fall des *Satzes des Pythagoras*, oder genauer seiner Umkehrung, daß nämlich in einem Dreieck, in dem die Qua-

[1] Der Aufsatz erschien erstmals 1953 in *Studium Generale*, Band 6, S. 392–398.

lei Kritik zu üben ist, so kann man doch heute schon sagen, daß hier ein ganz entscheidender Schritt zur Wiederherstellung der Einheit der mathematischen Wissenschaft, zu einer *Leibniz*schen *mathesis universalis*, getan wird, der nicht zuletzt auch für die Anwendungen der Mathematik in den Naturwissenschaften eine fruchtbare Auswirkung haben wird.

tisierendes und beherrschendes Leitprinzip nicht nur für die Algebra selbst, sondern auch für die Geometrie und die Funktionentheorie hinstellte. Diese bei *Klein* erstmalig hervortretende Tendenz, die ihrem *Inhalt* nach heterogenen mathematischen Einzeldisziplinen durch Aufdecken gemeinsamer *Formen*, gemeinsamer formaler *Grundbegriffe*, gemeinsamer formaler *Schlußweisen* wieder zusammenzuführen und von gemeinsamen allgemeinen Gesichtspunkten aus gegenseitig verständlich zu machen, hat sich in der Entwicklung der letzten Jahrzehnte in außerordentlichem Maße bewährt. Zu dem Gruppenbegriff sind andere Begriffe und ganze Disziplinen von ähnlicher Allgemeinheit hinzugetreten, wie

Mengenlehre, Topologie, Verbandstheorie, Maßtheorie,

die zunächst innerhalb der Algebra heranwachsend, dann über sie hinausgreifend, allmählich alle mathematischen Disziplinen durchsetzt und auf ihre einheitliche Gestaltung hingewirkt haben.

Bis in die *mathematische Physik* hinein ist diese Entwicklung erkenntlich. So ist in der Quantenmechanik der *Schrödinger*schen Behandlung mit den klassischen *analytischen* Hilfsmitteln aus der Theorie der *Differentialgleichungen*, die *Heisenberg*sche Behandlung mit dem der *linearen Algebra* entnommenen Hilfsmittel der *Matrizen* zur Seite getreten, und es ist bezeichnend, daß Heisenberg die Anregung zu dieser Gestaltung der Quantenmechanik aus seiner Berührung mit dem abstrakt-algebraischen Arbeitskreis von *Emmy Noether* erhalten hat. Und dieser *Heisenberg*schen Behandlung, die mit den vom algebraischen Standpunkt aus noch als *konkret* zu bezeichnenden Matrizen arbeitet, ist die *Dirac*sche Begründung gefolgt, die statt dessen mit *Operatoren* in einem abstrakten, d. h. axiomatisch festgelegten metrischen Zustandsraum im Sinne der *Topologie* und *Maßtheorie* arbeitet. Durch *Jordan* ist schließlich auch die aus der formalen Logik, Mengenlehre und abstrakten Algebra erwachsene *Verbandstheorie* als leitendes Prinzip für grundlegende Fragen der Quantenmechanik herausgestellt worden.

In ganz prononzierter Form ist diese *vereinheitlichende Tendenz durch Algebraisierung* das leitende Prinzip eines neuen Versuchs zu einer Gesamtdarstellung der Mathematik geworden, der gegenwärtig in einer groß angelegten Gemeinschaftsarbeit französischer Mathematiker unter dem Sammelnamen *Bourbaki* unternommen wird. Hierher gehört z. B. als eine schöne Frucht die *théorie des distributions* von *Laurent Schwartz* mit ihrer so wunderbar vereinfachenden und durchsichtig machenden Wirkung auf die Fragen der Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik. Wenn auch an der *Bourbaki*schen Methodik und vor allem an der gewählten Darstellungsform im einzelnen noch mancher-

dratsumme der beiden kleineren Seiten gleich dem Quadrat der dritten Seite ist, hier

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \ ,$$

der Winkel zwischen den beiden kleineren Seiten ein rechter ist.

Die Ägypter kannten aber diesen Satz des Pythagoras nicht. Für sie war die Rechtwinkelregel lediglich ein praktisches Rezept zur Absteckung eines rechten Winkels.

2. Mathematik als Kunst des Beweisens.

Es sind zuerst die *Griechen* gewesen, die über solche Regeln tiefer nachdachten und das Bedürfnis empfanden, die empirische Bestätigung durch einen *logischen Beweis* zu unterbauen. So entstand z.B. aus der ägyptischen Rechtwinkelregel bereits in der *frühgriechischen Zeit* der Satz des Pythagoras nebst seiner Umkehrung.

Die *große Blütezeit der klassischen griechischen Kultur* hat dann aus den empirischen Erkenntnissen der vorgriechischen Zeit ein großartiges Lehrgebäude von $\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\alpha$ entwickelt, wie es in dem Kompendium der klassisch-griechischen Mathematik, in den Elementen von Euklid, niedergelegt ist.

Diese $\mu\alpha\vartheta\eta\sigma\iota\varsigma$, von der der heutige Name „Mathematik" herrührt, entspringt einer völlig anderen Triebkraft als die praktischen Rezepte der vorgriechischen Zeit, nämlich der $\varphi\iota\lambda o\sigma o\varphi\iota\alpha$, der Liebe zur Weisheit. Sie befriedigt den Drang des Menschen nach *Erkenntnis um ihrer selbst willen*, und zwar nach einer Erkenntnis, die durch *logische Beweise* unterbaut ist und daher *objektive, für alle Zeiten gültige Wahrheiten* liefert.

Für die praktischen Anwendungen bringen die logischen Beweise keinen Nutzen; für sie genügt die durchgängige empirische Bestätigung. Die Griechen sehen diesen realen Standpunkt als einen niederen an. Die praktische Rechenkunst ($\lambda o\gamma\iota\sigma\tau\iota\kappa\eta$), wie sie etwa im kaufmännischen Leben gebraucht wird, hat keinen Platz in der von idealem Streben nach Wahrheit beherrschten Akademie Platons, Dort wird nur die aus ihr erwachsene Theorie der Zahlen und algebraischen Prozesse gepflegt, wie sie in geometrischer Einkleidung in die späteren Bücher von Euklids Elementen eingegangen ist. Erst diese theoretische Art der Betrachtung liefert $\mu\alpha\vartheta\eta\sigma\iota\varsigma$ (Wissenschaft) im griechischen Sinne. Praktische Erkenntnisse sind nur Vorwissenschaft, indem sie heuristisches Prinzip für die Gewinnung der ihnen zugrundeliegenden ewig gültigen Wahrheiten sind. Die Griechen gehen in der klassischen Epoche in dieser auf das rein Geistige gerichteten Haltung sogar so weit, daß bei der Gesamtdarstellung der wissenschaftlichen Ergebnisse Euklids Elementen jeder Hinweis auf die heuristisch zugrundeliegenden vorwissenschaftlichen Quellen unterdrückt ist.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Mathematik der klassischen griechischen Epoche nach Inhalt und Methoden *reinste Geisteswissenschaft* ist.

3. Mathematik als Mittel zum Verständnis der Natur.

Zwischen dem vorgriechischen rein-praktischen und dem klassisch-griechischen rein-theoretischen Standpunkt wurde dann in der *spät*griechischen Zeit eine großartige *Synthese* vollzogen, nämlich die Fruchtbarmachung der gewonnenen theoretischen Erkenntnisse zum *wissenschaftlichen Verständnis* und damit dann auch zur *Beherrschung des Naturgeschehens*. Man war schon früher auch an die in der Natur gemachten Beobachtungen mit der Haltung der $\varphi\iota\lambda o\sigma o\varphi\iota\alpha$ herangegangen, d. h. man wollte wissen, „was die Welt im Innersten zusammenhält“. Und da zeigte sich nun in der spätgriechischen Epoche, daß das inzwischen aus rein-idealen Triebkräften geschaffene mathematische Rüstzeug von größter praktischer Bedeutung war, indem es ermöglichte, feste Gesetze für den Ablauf des Naturgeschehens zu formulieren. Man fand die pythagoräische These: $'O\ \vartheta\epsilon o\varsigma\ \alpha\rho\iota\vartheta\mu\eta\tau\iota\zeta\epsilon\iota$ die bei den Pythagoräern selbst nur vage gefühlt und spekulativ ausgebaut war, überall in der Natur in dem Sinne bestätigt, daß das Naturgeschehen nach strengen, in der Sprache der Mathematik geschriebenen Gesetzen abläuft. Kurz, es entstanden die Anfänge dessen, was wir heute *theoretische Physik* nennen, so etwa die *dynamischen und hydrodynamischen Grundgesetze bei Archimedes und das antike Weltbild des Ptolomäus*.

In diesen drei antiken Phasen der Mathematik liegt eigentlich schon alles vorgezeichnet, was sich heute nach über 2000 Jahren zu dem Thema dieses Vertrags sagen läßt. Auf dem Gebiet der Mathematik gilt in ganz besonderem Maße, daß die griechische *Kultur die wesentliche Grundlage unserer heutigen abendländischen Kultur ist.*

II. Aspekte der heutigen Mathematik.

1. Reine Mathematik.

Die griechische Auffassung von der Mathematik als *Geisteswissenschaft* ist heute durch die großartige Weiterentwicklung der *reinen Mathematik*, vor allem

3. Mathematik als begrifflich-vereinheitlichende Wissenschaft.

Im Laufe der historischen Entwicklung haben sich Epochen mit ganz verschiedenartigen Grundtendenzen mathematischen Schaffens abgelöst.

Auf die stürmische Vorwärtsentwicklung im Aufklärungszeitalter, deren Lebensstrom wesentlich aus den Anwendungen floß, und die sich im Drange der zu bewältigenden Aufgabenfülle nicht die Zeit zu völlig exakter logischer Begründung nahm, folgte im vergangenen Jahrhundert eine Periode der Rückbesinnung auf das logische Fundament des inzwischen errichteten grandiosen Gebäudes, verbunden mit einer Vertiefung des Erreichten nach der rein-theoretischen Seite hin.

Zu Beginn dieses Jahrhunderts schien es, als ob die zu immer größerer Höhe, Tiefe und Breite anwachsende mathematische Wissenschaft in eine Reihe von einander getrennter Einzeldisziplinen zerfallen sollte. Die Vertreter der drei großen Fachrichtungen:

Arithmetik-Algebra, Analysis, Geometrie,

und sogar die Vertreter einzelner Zweige dieser Fachrichtungen arbeiteten an speziellen Problemen von völlig verschiedenartigem Charakter und Zielsetzung, und sie verloren immer mehr das gegenseitige Verständnis nicht nur für ihre Ergebnisse, sondern auch für ihre Fragestellungen. An dieser Tendenz zum Zerfall konnte es auch nichts ändern, daß es noch einzelne ganz große Mathematiker von universalem Charakter gab, wie etwa *Hilbert*, der im Laufe seines Lebens auf fast allen Einzelgebieten mathematischen Schaffens entscheidende und für lange Zeit richtungsweisende Fortschritte erzielte, ähnlich wie ein Jahrhundert zuvor der princeps mathematicorum, *Gauß*.

In neuester Zeit ist nun deutlich erneut eine Tendenz zur Vereinheitlichung des großen Gesamtkomplexes der mathematischen Wissenschaft zu erkennen. Diese Tendenz kommt von einer ganz unerwarteten Seite her. Es breitet sich nämlich *eine* der bisher als ausgesprochenes Spezialgebiet — und noch dazu von besonders abstraktem Charakter — empfundene Disziplin in immer steigendem Maße über *alle anderen* Disziplinen aus, nämlich die *Algebra*. Ursprünglich als *Theorie* des Auflösens von Gleichungen erwachsen, wird sie immer mehr zu einer *Formlehre der Gesamtmathematik*, wie sie schon *Leibniz* als *mathesis universalis* vorgeschwebt hatte. Nachdem schon seit langem durch *Descartes* die Geometrie den Methoden der klassischen Algebra untergeordnet war, setzt der neue Siegeszug der Algebra mit *Felix Klein* ein, der den auf dem Boden der klassischen Algebra erwachsenen *Gruppenbegriff* als systemaschied besteht, indem der erstere seine Erkenntnisse durch streng deduktives logisches Denken erzwingt, der letztere dagegen durch eine beobachtende, experimentierende Tätigkeit gewinnt.

Demgegenüber ist zu sagen, daß auch für den Mathematiker das Experiment eine wichtige Rolle spielt, vor allem in der vorher besprochenen diskreten Mathematik. Nur daß dieses Experimentieren des Mathematikers nicht wie beim Physiker an Objekten der äußeren Erfahrung erfolgt, sondern an Objekten der inneren Erfahrung, der eigenen Gedankenwelt. Mit den Zahlen läßt sich ebenso schön, technisch sogar viel leichter, als etwa mit den Elektronen, experimentieren. Ein solches *Experimentieren* mit Zahlen ist häufig, und gerade bei den ganz großen Ergebnissen, der *erste Akt* der Entdeckung gewesen. Da das Experimentieren sich nur auf einen Endlichen Bereich erstrecken kann, führt es natürlich nicht ohne weiteres zu mathematischen Theoremen. Als *zweiter* Akt folgt dann etwas, was der Mathematiker in gleichem Maße haben muß wie der seine Beobachtungen ausdeutende Naturwissenschaftler, nämlich die *Phantasie*, mit der er aus dem durch die Experimente gewonnenen beschränkten Material das ihnen zugrundeliegende allgemeine Gesetz *erschaut.* Auch für den Mathematiker, gemeinhin nur als der Mann der messerscharfen Logik bekannt, ist die Phantasie ein unentbehrliches Hilfsmittel. *Hilbert* hat das einmal scherzhaft betont, indem er von einem abtrünnig gewordenen Schüler sagte, er sei unter die Dichter gegangen, weil seine Phantasie für die Mathematik nicht ausgereicht habe. Und wie beim Naturwissenschaftler als *dritter Akt* schließlich die Unterordnung des erschauten neuen Gesetzes unter allgemeine Prinzipien zu leisten ist, so beim Mathematiker die Unterordnung unter die Axiome, d. h. der strenge logische Beweis. Dieser logische Beweis, so wesentlich er auch für den echt-mathematischen Charakter der gewonnenen Erkenntnis ist, steht demnach bei dem eigentlichen Schöpfungsakt im Hintergrund. Er ergibt sich in den meisten Fällen ganz zwangsläufig, wenn es der Phantasie gelungen ist, die Wahrheit richtig zu erschauen. *Führer* für die Phantasie zu einem solchen Erschauen der Wahrheit ist meist das Kriterium der *Schönheit*; es ist eben auch in der Mathematik das Prinzip von der *prästabilierten Harmonie* realisiert, das der *Leibniz*sche Ausdruck für das vorhin besprochene Wunder ist.

So besteht also, was die Arbeitsmethoden betrifft, durchaus kein so großer Unterschied zwischen Mathematik und Naturwissenschaften, wie man gemeinhin glaubt. Mathematik ist vielmehr im Grunde selbst eine Naturwissenschaft, nämlich eine Wissenschaft von Gegenständen unserer inneren Erfahrung.

in den letzten drei Jahrhunderten, zu einer unbestrittenen Realität geworden.

Es ist schwer zu umgrenzen, was Mathematik in diesem Sinne eigentlich ist. Man kann aber jedenfalls folgendes sagen:

Die *Gegenstände* der Mathematik sind nicht Objekte der Außenwelt, sondern Objekte unseres Denkens und unserer inneren Anschauung, also *Objekte unserer Geisteswel*t, nämlich

Zahlen, Figuren,

beides durch Abstraktion aus der Außenwelt gewonnene Begriffe. Ihnen entsprechen die beiden großen Zweige, in die sich die heutige Mathematik aufspaltet, nämlich

Zahlenlehre	Figurenlehre
(Arithmetik, Analysis),	(Geometrie).

Daß die *Zahlen* Objekte unserer Geisteswelt sind, ist klar. Die einfachsten unter ihnen, die *natürlichen Zahlen*, entspringen durch *gedankliche Abstraktion* aus Gegenstandsmengen in der Außenwelt. Darauf bauen sich dann durch logische Konstruktionsprozesse die sukzessiven Erweiterungen auf, zu den *ganzen*, den *rationalen*, den *reellen* und den *komplexen Zahlen.* Es sei ausdrücklich betont, daß die für die Anwendungen in der Naturwissenschaft so wichtigen reellen Zahlen *logische* Konstruktionen aus dem Urmaterial, den natürlichen Zahlen, sind. Heuristischer Ausgangspunkt für diese Konstruktion ist die Aufgabe der Streckenmessung. Man kann aber die reellen Zahlen nicht einfach als „Maßzahlen von Strecken" einführen, weil man dabei ja die Existenz eines Zahlbereichs, der für die Streckenmessung geeignet ist, vorweg postuliert. Schon die Griechen haben dies erkannt und gezeigt, wie man die für die Streckenmessung erforderlichen Zahlen in logisch einwandfreier Weise aus den natürlichen Zahlen konstruiert (Verhältnislehre des Eudoxos aus dem fünften Buch von Euklids Elementen). Die moderne Lösung dieses Konstruktionsproblems (Dedekindsche Schnitte) knüpft unmittelbar an diese antike Lösung an.

Was die *Figuren* betrifft, so sind auch sie nicht Gegenstände der Außenwelt, sondern Abstraktionen aus solchen, hier nicht im Bereich des Denkens, sondern in demjenigen Bereich unseres Geisteslebens, den Kant die *innere Anschauung* genannt hat. Wenn auch dieser Kantsche Begriff vielfach umstritten Ist, so ist doch klar, daß etwa die *Geraden der Euklidischen Geometrie* etwas grundsätzlich anderes sind als die *Geraden der Physik.* Die *Geraden der Mathematik* sind nach Kant apriorische Gegebenheiten in unserer inneren Anschauung. Diese Auffassung hat allerdings der modernen Kritik nicht standgehalten. Sie wird nach *Hilbert* durch die axiomatische Auffassung ersetzt, bei der die Geraden zusammen mit den Punkten ein System von zwei gedanklichen Gegenstandsorten sind, zwischen denen eine Reihe von Relationen, Axiome genannt, bestehen, unter denen vor allem das Parallelenaxiom eine für die euklidischen Geraden charakteristische Bedeutung hat. Auf die Frage des Kantschen a priori kommt man bei dieser Auffassung erst, wenn man fragt, wieso man gerade *diese* Axiome zugrunde legt, die jedenfalls vom reinen Denken her vor *anderen möglichen* Axiomen (nichteuklidische Geometrie) in keiner Weise bevorzugt sind. Ob es so etwas wie eine innere Anschauung gibt, in der die euklidischen Axiome vor anderen Möglichkeiten bevorzugt sind, ist eine strittige Frage der Philosophie. Wie man sich auch zu dieser Frage einstellt, jedenfalls sind die *Geraden der Physik* nicht apriorisch gegeben und überhaupt keine Gegenstände unserer Geisteswelt. Sie sind vielmehr unmittelbar in der Außenwelt gegeben als die Bahnlinien von elementaren Materieteilchen oder von Lichtquanten im kräftefreien Feld. Sie tragen, wie alle physikalischen Definitionen, eine Unbestimmtheit und sogar eine Gebundenheit an den Stand unserer Naturerkenntnis in sich. Die Aussagen der Geometrie handeln nicht von diesen verschwommenen, im Bereich unserer äußeren Erfahrung auftretenden Geraden, sondern von den logisch präzise definierten Geraden der Mathematik.

Mit dieser modernen logischen Auffassung von den Gegenständen der Geometrie und der auf *Descartes* zurückgehenden Beschreibung geometrischer Sachverhalte durch rechnerische Beziehungen zwischen Zahlen wird übrigens der klassischen Nebeneinanderstellung der beiden Hauptzweige der Mathematik:

Zahlenlehre, Figurenlehre,

ihre Grundlage genommen, indem eben die Figurenlehre der Zahlenlehre untergeordnet wird. Statt dessen tritt in der modernen Mathematik eine andere, rein logisch fundierte Einteilung in zwei wesensverschiedene Hauptzweige:

diskrete Mathematik, kontinuierliche Mathematik.

Diese Einteilung wird, grob gesagt, gegeben durch die Unendlichkeitsstufe des betrachteten Bereichs mathematischer Gegenstände und der zu seiner Beschreibung verwendeten logischen Schlußweisen. Im Bereich der Zahlen liegt der Schnitt zwischen den *rationalen Zahlen*, deren jede durch einen endlichen Konstruktionsprozeß aus den natürlichen Zahlen gewonnen werden kann, und deren Bilder auf der Zahlgeraden *diskret* liegen, und den *reellen Zahlen*, die erst durch unendliche Konstruktionsprozesse gewonnen werden und deren Bilder auf der Zahlgeraden *kontinuierlich* liegen. Die Unterscheidung beruht auf der Unmöglichkeit, das Kontinuum vom Diskreten her durch finite logische Konstruktion zu erfassen. Es handelt sich um dieselbe Unterscheidung, die schon in den beiden diametral entgegengesetzten Standpunkten

Atomismus, *παντα ρει*

der griechischen Mathematik und Naturlehre hervortritt und deren Unver-

Obwohl diese Einrichtungen bis in die heutige Zeit fortbestehen und ein reges wissenschaftliches Eigenleben entwickelt haben, ist die heutige Tendenz doch ganz deutlich auf eine erneute Verschmelzung dieser Trennung gerichtet. Der tiefere Grund dafür liegt in folgenden immer klarer hervortretenden Tatsachen:

Einerseits haben Fragestellungen, die aus den Anwendungen entsprungen sind, immer wieder die reine Mathematik ganz entscheidend befruchtet. Dies liegt auf der Hand für die Entstehung und den Ausbau der Infinitesimalrechnung. Ein anderes Beispiel ist etwa die Theorie der Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen, die, aus physikalischen Fragen der Schwingungslehre entsprungen, zu einer tiefgreifenden Umwälzung des Funktionsbegriffs und auf dieser Basis zu neuen, rein-mathematischen Theorien, wie Integralgleichungen, Funktionalanalysis, geführt hat.

Andererseits hat es sich auch immer wieder gezeigt, daß Erkenntnisse der reinen Mathematik, die mit keinerlei Gedanken an etwaige Anwendungen gewonnen wurden, plötzlich — und oft erst Menschenalter nach ihrer Entdeckung — sich als entscheidende Hilfsmittel für Anwendungen erwiesen. Man denke hierbei etwa an die von *Gauß* zuerst in der Algebra und Zahlentheorie eingeführten komplexen Zahlen, die heute ein nicht mehr wegzudenkendes Hilfsmittel in der theoretischen Physik und sogar in der praktischen Physik (Elektrotechnik) geworden sind. Oder an die *Riemann*sche Geometrie, die, aus reinmathematischen Fragestellungen der Differentialgeometrie auf Flächen erwachsen, später die Grundlage für die *Einstein*sche Relativitätstheorie geworden ist.

Solche Beispiele in beiderlei Richtung ließen sich häufen.

Sie lehren, daß eine scharfe Trennungslinie zwischen reiner und angewandter Mathematik überhaupt nicht zu ziehen ist. Was heute nur „angewandtes“ Interesse hat, kann morgen entscheidende Bedeutung vom „reinen“ Standpunkt aus haben, und umgekehrt. Natürlich wird es immer *Mathematiker* geben, die mehr nach der einen oder anderen Seite veranlagt, interessiert und tätig sind, und das ist auch gut, weil nur so höchste Leistungen in der einen oder anderen Richtung zu erwarten sind. Aber die *Mathematik*, an der sie beide arbeiten, ist im Grunde eine untrennbare Einheit. Erst durch ihr Doppelgesicht, als reine *und* angewandte Mathematik bekommt sie ihre beherrschende Stellung als eine der wesentlichen Grundlagen unserer Kultur.

2. Mathematik als experimentierende Wissenschaft.

Man stellt sich gemeinhin vor, daß zwischen der Arbeit des schöpferischen, reinen Mathematikers und der des Naturwissenschaftlers ein himmelweiter Unter-aus den Beobachtungen in der *Vergangenheit* gewonnenen Naturgesetze Anspruch auf absolute Gültigkeit, also auf Gültigkeit auch in allen *zukünftigen* Fällen, erheben können. Die von *Kant* hierfür versuchte Erklärung, daß ein gesetzmäßiger Ablauf des Naturgeschehens notwendige Voraussetzung für die Möglichkeit aller wissenschaftlichen Naturerkenntnis sei, erscheint mir vom streng logischen Standpunkt aus als eine petitio principii, so fruchtbar auch der in ihr liegende Idealismus, die in ihr liegende Überzeugung von der Notwendigkeit der Existenz allgemeingültiger Naturgesetze als Arbeitshypothese für den Naturwissenschaftler ist.

III. Tendenzen in der modernen Mathematik.

Es sollen jetzt noch kurz einige Tendenzen in der modernen Mathematik besprochen werden, und zwar solche Tendenzen, von denen aus die beiden vorstehend besprochenen Aspekte als reine und angewandte Mathematik von verschiedenen Seiten aus beleuchtet werden.

1. Synthese zwischen reiner und angewandter Mathematik.

Der Begriff der *angewandten Mathematik* als ein besonderer, der *reinen Mathematik* gegenüberstehender Wissenschaftszweig ist erst in neuerer Zeit entstanden. In den beiden großen Zeitschriftengründungen des vorigen Jahrhunderts:

Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik,
Journal de Liouville des mathématiques pures et appliquées,

tritt er zwar schon hervor; die Tatsache aber, daß in diesen Organen *beiden* Zweigen Raum gegeben wird, zeigt, daß die beiden Aspekte noch als eine *Einheit* angesehen wurden. Eine selbständige Bedeutung als besonderer Wissenschaftszweig bekam die angewandte Mathematik vor allem durch die reformatorische Wirksamkeit von *Felix Klein*, des großen Organisators der Mathematik um die Jahrhundertwende, der einer Unterbewertung der angewandten Mathematik unter dem Einfluß des Neuhumanismus entgegentrat und dazu, bei aller Betonung der Einheit beider Zweige, nachdrücklich für die Pflege des angewandten Zweiges als einer besonderen Wissenschaft eintrat. So kam es zur Gründung besonderer Zeitschriften und Vereinigungen ausgesprochen angewandter Fachrichtung und zur Einführung besonderer Lehrstühle und Vorlesungskurse für die angewandte Mathematik.

einbarkeit dort zu heftigen Diskussionen über die logischen Grundlagen der Mathematik und der Naturerkenntnis geführt hat.[2] Und heute tritt diese Unterscheidung in den beiden nebeneinander bestehenden und sich scheinbar widersprechenden Auffassungsweisen der modernen Physik:

Korpuskulartheorie, Wellentheorie,

hervor, die ebenso heftige Diskussionen über die logischen Grundlagen unserer Naturerkenntnis aus gelöst hat.

Soviel über die Gegenstände der Mathematik. Die *Mathematik selbst* ist ein Lehrgebäude, das Aussagen über diese Gegenstände durch logisches Schließen beweist.

Dazu ist aber folgendes zu sagen: Nicht jede beliebige *Aussage* dieser Art ist Mathematik im wissenschaftlichen Sinne, z. B. nicht die Aussage: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ oder die Aussage: in einem rechtwinkligen Dreieck mit den beiden Katheten 3, 4 ist die Hypotenuse 5. Für eine echte mathematische Aussage ist vielmehr wesentlich, daß durch ein *endliches* logisches Schlußverfahren eine Wahrheit über eine *unendliche* Gesamtheit von Gegenständen bewiesen wird, also etwa über

alle natürlichen Zahlen (z. B. $ab = ba$),
alle rechtwinkligen Dreiecke (z. B. Satz des Pythagoras).

Während nämlich die Aussagen der ersteren Art jeweils durch ein einfaches Experiment bestätigt werden können, wären zur Bestätigung von Aussagen der letzteren Art unendlich viel solche Experimente erforderlich, die mit menschlichen Kräften nicht ausführbar sind. Daß es dem menschlichen Geist trotzdem gelingt, die Richtigkeit solcher Aussagen über eine *unendliche* Menge von Einzelfällen durch ein *endliches* logisches Schlußverfahren zu *beweisen*, ist eines der erstaunlichsten Wunder in unserer geistigen Welt. Nur wo sich dieses Wunder vollzieht, nur wo durch diese wunderbare Fähigkeit unseres Geistes ewig gültige Wahrheiten über unendliche Mengen von Gegenständen unserer inneren Erfahrung gewonnen werden, liegt das vor, was wir Mathematik im echten wissenschaftlichen Sinne nennen.

Und über diese Forderung an die Einzelaussagen hinausgehend, muß auch noch eine Forderung an das ganze *Aussagengebäude* erfüllt sein, wenn diese eine echte mathematische Theorie sein soll. Die einzelnen Aussagen dürfen nicht lediglich eine Sammlung von zusammenhangslos dastehenden Einzeltatsachen sein; sie müssen sich vielmehr in organischer Weise zu einem harmonischen

[2] Siehe dazu H. Hasse-H. Scbolz, Die Grundlagenkrisis der Griechischen Mathematik. Pan-Bücherei, Gruppe Philosophie, Nr. 3, Pan-Verlag Kurt Metzner G.m.b.H., Berlin-Charlottenburg 1928.

Ganzen zusammenschließen, das von ästhetischen Gesichtspunkten, wie Klarheit, Durchsichtigkeit, Prägnanz, Eleganz, durch die Fragestellungen ausgelöste Spannung, durch die Überzeugungskraft der Beweise vermittelte Befriedigung, beherrscht wird. Eine diesen Bedingungen genügende mathematische Theorie, wie etwa

Infinitesimalrechnung, Zahlentheorie, Funktionentheorie,

ist ein *durch seine Schönheit imposantes Gebilde, ein durch seine Dynamik lebensvoller Organismus*, kurz ein Kunstwerk, und dient, wie ein großer Mathematiker einmal gesagt hat, *einzig und allein der Ehre des menschlichen Geistes*.

2. Angewandte Mathematik.

Neben diesem *Eigenleben* der Mathematik als einer *reinen* Wissenschaft, einer Geisteswissenschaft, steht als ebenso unbestrittene Realität ihre *dienende Funktion* als eine *angewandte* oder besser *anwendbare* Wissenschaft, nicht nur in der untergeordneten vorgriechischen Rolle einer Kunst des Berechnens und Messens, sondern vor allem in der souveränen spätgriechischen Rolle einer *Kunst des Erklärens, Verstebens und damit Beherrschers der Natur*.

Die eigentümliche und einzigartige Stellung der lathematik in dieser Hinsicht hat *Kant* dahin zusammengefaßt, daß eine Wissenschaft diesen Namen nur insoweit verdient, als sie mit den Methoden der Mathematik vorgeht. Wir können diese Kantsche These auch heute noch bejahen, jedenfalls im Bereich der sog. exakten Naturwissenschaften. Die Mathematik erscheint in ihnen als ein ordnendes Prinzip für die so unendlich komplizierte Fülle der Erscheinungen der Außenwelt und darüber hinaus als eine Methode, das Geschehen in dieser Außenwelt dadurch einheitlich zu verstehen, daß es allgemeinen, in mathematischer Sprache geschriebenen Gesetzen unterworfen wird.

Daß es dem Lehrgebäude der reinen Mathematik, mit seiner vorher geschilderten logischen und ästhetischen Eigengesetzlichkeit, gelingt, diese Funktion so handgreiflichem und durchschlagendem Erfolg zu erfüllen, ist ein vielleicht noch tieferes Wunder wie die vorher besprochene wunderbare Fähigkeit des Menschengeistes, mittels endlicher logischer Schlußverfahren zu Aussagen über unendliche Gesamtheiten zu gelangen. Denn während dort die Gesamtheiten unserer *inneren Erfahrung*, also unserem Denken, entstammen und mit den Methoden eben dieses Denkens angepackt werden, handelt es sich hier um Gegenstände unserer *äußeren Erfahrung*, die, von vornherein dem denkenden „Subjekt“ als ganz andersartiges „Objekt“ gegenübersteht.

Nun ist allerdings zu sagen, daß die in mathematischer Form über die Außenwelt gemachten Aussagen, die *Naturgesetze*, nicht den Anspruch auf völlig exakte Gültigkeit in der wirklichen Außenwelt machen können. Die in sie eingehenden Begriffe und die Gesetze selbst sind immer an idealisierende Voraussetzungen gebunden, die in Wirklichkeit niemals genau realisiert sind. Es gibt in der Wirklichkeit eben keine Massenpunkte, keine kräftefreien Felder usw. Bei den Naturgesetzen handelt es sich demnach um Aussagen über eine idealisierte Außenwelt, die in Wahrheit nur in unserer Vorstellung existiert. Aber es lassen sich für die Abweichungen, die in der wirklichen gegenüber dieser idealisierten Außenwelt vorliegen, auf mathematischem Wege Größenabschätzungen gewinnen und damit Genauigkeiten festlegen, innerhalb derer die Naturgesetze Gültigkeit beanspruchen können. Und es bleibt dann auch bei dieser Einschränkung die wunderbare Tatsache, daß man auf Grund von mathematisch formulierten Naturgesetzen *Prophezeiungen* über den Ablauf des Naturgeschehens machen kann. Daß ein frei losgelassener Stein nach 2 sec eine Höhe zwischen 19 und 20 m durchfallen haben wird, erscheint uns auf Grund des Galileischen Fallgesetzes $s = \frac{g}{2}t^2$ ebenso unbedingt gewiß, wie auf Grund des kommutativen Multiplikationsgesetzes $ab = ba$ die Tatsache, daß wir bei Ausführung der Multiplikation zweier zehnstelliger Zahlen in beiden Reihenfolgen das gleiche Ergebnis erhalten werden. Nur daß beim Fallgesetz unser Erstaunen über die Möglichkeit einer solchen Prophezeiung mit Recht noch größer ist als beim Zahlenrechnen. Es ist eben ein grundsätzlicher Unterschied zwischen dem Wahrheitscharakter von Prophezeiungen über unsere Gedankenwelt und über die Außenwelt vorhanden. Daß das Fallgesetz einmal verletzt sein könnte, ist für den menschlichen Geist *denkbar*, nicht aber, daß das kommutative Multiplikationsgesetz für die natürlichen Zahlen einmal verletzt sein könnte.

Kant hat sich über das Wunder der Anwendbarkeit der Mathematik auf das Naturgeschehen tiefe Gedanken gemacht. Seine Antwort war, daß wir die Natur ja überhaupt nur durch die uns inhärente Brille der räumlichen und zeitlichen Form unserer inneren Anschauung wahrnehmen, und daß wir damit die für diese Form a priori gültigen mathematischen Gesetze von uns aus in die Natur hineinsehen. Der Kern dieser Kantschen Antwort ist, von der strittigen Frage des apriorischen Charakters gerade der euklidischen Geometrie und überhaupt der geometrischen Gegenstände abgesehen, auch heute noch zu bejahen. Wie man aber auch zu dieser Kantschen These steht, sie erklärt doch *lediglich*, wieso die Mathematik als ordnendes Prinzip für die Erscheinungen der Außenwelt geeignet ist, und *bestenfalls*, wieso sie uns zu einem tieferen Verständnis dieser Erscheinungen verhelfen kann, aber *nicht*, wieso die mit ihren Denkmitteln